

Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
Τμήμα Μαθηματικών
Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης
Απειροστικός Λογισμός II

Τμήμα Περιττών / Διδάσκων: Ανδρέας Τόλιας
Σεπτέμβριος 16, 2016

- Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{3x} \sin 2x$. Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor της f τάξης 3 γύρω από το $x_0 = 0$.
- (Α') Αν I ένα διάστημα του \mathbb{R} και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τότε δείξτε τα επόμενα:
 - Αν η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz (να δώσετε τον ορισμό της έννοιας) τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
 - Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο I με φραγμένη παράγωγο, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
 - Αν $I = [a, \beta]$ με $a < \beta$ και η f είναι συνεχής στο I τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.(Β') Να εξετάσετε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, -3), \quad g(x) = x^2, \quad x \in (0, +\infty), \quad h(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \in (0, \pi)$$

- Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω σειρές.

$$(\alpha') \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \qquad (\gamma') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (2n)!}{(3n)!} \qquad (\epsilon') \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{3n+4}$$

$$(\beta') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3n}{n^2} \qquad (\delta') \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+4}\right)^n$$

- Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 - 16}$ και να φέρετε το αποτέλεσμα στη μορφή $\kappa \log \lambda$ για κατάλληλους ρητούς αριθμούς κ, λ .
- Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [3, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 4 & , \quad x \in [3, 7] \cap \mathbb{Q} \\ 5 & , \quad x \in [3, 7] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Να υπολογίσετε το κάτω ολοκλήρωμα $\int_3^7 f(t) dt$ καθώς επίσης και το πάνω ολοκλήρωμα $\overline{\int}_3^7 f(t) dt$.

Είναι η f Riemann ολοκληρώσιμη;

(Υπόδειξη: Υπολογίστε πρώτα το κάτω άθροισμα και στη συνέχεια το άνω άθροισμα για τυχαία διαμέριση \mathcal{P} του διαστήματος $[3, 7]$.)

- (α') Να υπολογίσετε το αόριστο ολοκλήρωμα: $\int x^2 \cos x dx$.
(β') Υπολογίζοντας πρώτα το αόριστο, βρείτε το ορισμένο :

$$\int_0^{\frac{1}{2} \log 3} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!